International Science and Technology Journal
المجلة الدولية للعلوم والتقنية

Volume 37 العدد
Part 1 المجلد

المجلة الدولية للعلوم والتقنية
International Science and Technology Journal
ISTJ

http://www.doi.org/10.62341/ANae1608

Received	2025/07/18	تم استلام الورقة العلمية في
Accepted	2025/08/14	تم قبول الورقة العلمية في
Published	2025/08/16	تم نشر الورقة العلمية في

دالة كتلة احتمال فيبوناتشي مع سلسلة ماركوف مونت كارلو

عبد الناصر سالم الضبع
قسم الإحصاء– كلية العلوم– جامعة غريان – ليبيا
E-mail: edabaaabdanasir@yahoo.com

الملخص

هناك حاجة متزايدة لفهم المتتاليات الرياضية وتطويرها والتنبؤ بها. تهدف هذه الورقة إلى توسيع نطاق متتاليات فيبوناتشي لإنشاء مصفوفة انتقال ماركوف. ولهذا الغرض، اشتققنا طريقة جديدة لإنشاء مصفوفة انتقال ماركوف لدراسات سلسلة ماركوف مونت كارلو، وتطبيقها على التوزيع الاحتمالي لفيبوناتشي.

الكلمات المفتاحية: سلسلة ماركوف مونت كارلو، التوزيع الاحتمالي لفيبوناتشي

Fibonacci probability mass function with Markov chain Monte Carlo

ABD ANASIR SALEM EDABAA
0000-0001-5329-3565
Department of Statistics: Faculty of Science: University of Gharyan
Gharyan - Libya
Email: edabaaabdanasir@yahoo.com

Abstract

There is an increasing need for understanding, developing, and predicting mathematical sequences. The purpose of this study is to extend the framework of the Fibonacci sequence for creating a Markov transition matrix. For this purpose, we derive a new method to create a Markov transition matrix for Markov Chain Monte Carlo studies and apply it to the Fibonacci distribution.

Keywords: Markov Chain Monte Carlo "MCMC", Fibonacci probability distribution.

1– المقدمة:

سلسلة ماركوف مونت كارلو، هي طريقة عامة لمحاكاة العمليات العشوائية، حيث تكون كثافة احتمالاتها معرُفة ثابتة. وقد أصبحت هذه الطريقة شائعة جدًا في العقود الأربعة

http://www.doi.org/10.62341/ANae1608

الماضية. انظر [1]، [2]، [3]، [4]، [5]. على الرغم من وجود أوصاف ممتازة لتقنية MCMC (انظر [6]، على سبيل المثال)، فما زال من الصعب على العامة فهم الموضوع. تطبَق هذه الورقة نموذج MCMC من خلال إعداد مصفوفة انتقال مناسبة بطريقة جديدة وتطبيقهما على توزيع فيبوناتشي. في القسم الثاني، نعرض تطويرنا الجديد لمصفوفات انتقال سلسلة ماركوف المناسبة. يتضمن هذا القسم توزيع فيبوناتشي الذي نستخدمه في محاكاة سلسلة ماركوف. يتضمن القسمان الثالث والرابع استخدام برنامج R والنتائج.

1- تطوير مصفوفة لفيبوناتشي:

في Bilgici & Edabaa، تم تحديد توزيع فيبوناتشي ليكون له دالة كتلة احتمال [7].

$$f_{(x)} = \frac{F_x}{2^{x+1}} \qquad where\ x = 1,2,3, \dots, \tag{1}$$

$f_{(x)}$ تمثل دالة كتلة احتمال فيبوناتشي و

$F_1 = 1, F_2 = 1, F_x = S_{x+1} + S_{x+2} = F_{x-1} + F_{x-2}$ حيث $x = 3,4,5, \dots$

تمثل ارقام فيبوناتشي

يتم استخدام MCMC لمحاكاة المشاهدات من توزيع فيبوناتشي.

أولاً: نحسب نسبة احتمالات فيبوناتشي المتتالية:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{F_{x+1}}{2^{x+3}} \Big/ \frac{F_x}{2^{x+2}} = \frac{F_{x+1}}{2F_x} \tag{2}$$

بدلاً من استخدام طريقة خوارزمية متروبوليس-هاستينجز (Metropolis-Hastings algorithm Wikipedia)، نستخدم خيارًا خاصًا من طريقة روزنبلوث هاستينج (the Rosenbluth Hastings method)، للحصول على احتمالات الانتقال لنسب الحد المعطاة.

نبدأ بإنشاء سلسلة ماركوف لفضاء الحالة 1، 2، 3، ... مع احتمال تغير الحالة. سنستخدم إحدى عمليات سلسلة ماركوف، والتي تُسمى عملية الولادة والموت[8]، والتي تُوفر لنا توزيع الاحتمالات الحدّي المطلوب.

من المعادلة (2) لدينا

$$2F_x f(x+1) = F_{x+1} f(x)$$

نستخدم هذه المعادلة كمعادلة توازن لعملية ماركوف مستمرة الزمن. يبدو مخطط انتقال الولادة والموت كما يلي:

http://www.doi.org/10.62341/ANae1608

$$(2) \underset{2F_1}{\overset{F_2}{\rightleftarrows}} (3) \underset{2F_2}{\overset{F_3}{\rightleftarrows}} (4) \underset{2F_3}{\overset{F_4}{\rightleftarrows}} (5) \underset{2F_4}{\overset{F_5}{\rightleftarrows}} (6) \underset{2F_5}{\overset{F_6}{\rightleftarrows}} (7) \underset{2F_6}{\overset{F_7}{\rightleftarrows}} (8)$$

شكل (1) يمثل مخطط الولادة والموت

في عملية الولادة والموت، تُحسب جميع الاحتمالات المقيدة بناءً على احتمال أساسي (عادةً π_0، ولكن في حالتنا، لا يوجد π_0، وبالتالي فإن الاحتمال الأساسي لدينا هو π_1). بناءً على شرط أن يكون مجموع الاحتمالات مساويًا لـ 1، نحدد الاحتمال الأساسي. في هذه الحالة، إذا سمينا الاحتمالات الحدية كما يلي:

$$\pi_1 = f_{(1)}, \pi_2 = f_{(2)}, \pi_3 = f_{(3)} , \dots$$

سوف نحصل علي

$$\pi_2 = f_{(2)} = \frac{F_2}{2F_1} f_1 = \frac{F_2}{2F_1} \pi_1 ,$$
$$\pi_3 = f_{(3)} = \frac{F_3}{2F_2} f_{(2)} = \frac{F_3 F_2}{2^2 F_1 F_2} \pi_1,$$
$$\pi_4 = f_{(4)} = \frac{F_4}{2F_3} f_{(3)} = \frac{F_4 F_3 F_2}{2^3 F_3 F_2 F_1} \pi_1,$$
$$\pi_5 = f_{(5)} = \frac{F_5}{2F_4} f_{(4)} = \frac{F_5 F_4 F_3 F_2}{2^4 F_4 F_3 F_2 F_1} \pi_1,$$

So

$$\pi_2 = \frac{F_2}{2F_1}\pi_1, \pi_3 = \frac{F_3}{2^2 F_1}\pi_1, \pi_4 = \frac{F_4}{2^3 F_1}\pi_1, \pi_5 = \frac{F_5}{2^4 F_1}\pi_1 , \dots , and$$
$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \cdots$$
$$1 = \pi_1 \left[1 + \frac{F_2}{2F_1} + \frac{F_3}{2^2 F_1} + \frac{F_4}{2^3 F_1} + \frac{F_5}{2^4 F_1} + \cdots \dots \dots . . \right]$$
$$1 = \pi_1 [1 + \frac{1}{F_1} \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_{i+1}}{2^i}]$$

طالما تم الحفاظ على نسبة النسب الزوجية، فسنحصل على نفس الاحتمال المقيدة. لذلك، نقسم كل زوج على مجموع المكونين (مع ترك نفس النسبة)، حتى لا تصبح المعدلات كبيرة بشكل تعسفي، يتم الحصول على مخطط انتقال حالة جديد بنفس الاحتمالات الحدية.

http://www.doi.org/10.62341/ANae1608

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\frac{F_2}{F_2+2F_1} & & \frac{F_3}{F_3+2F} & & \frac{F_4}{F_4+2F_3} & & \frac{F_5}{F_5+2F_4} & & \frac{F_6}{F_6+2F_5} & & \frac{F_7}{F_7+2F_6} & \\
 & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow \\
 & (2) & & (3) & & (4) & & (5) & & (6) & & (7) \\
 & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow \\
\frac{2F_1}{F_2+2F_1} & & \frac{2F_2}{F_3+2F_2} & & \frac{2F_3}{F_4+2F_3} & & \frac{2F_4}{F_5+2F_4} & & \frac{2F_5}{F_6+2F_5} & & \frac{2F_6}{F_7+2F_6} &
\end{array}$$

شكل (2) يمثل مخطط الانتقال الحالة الجديد لمخطط الولادة والموت

المصفوفة المقابلة التالية هي المصفوفة المولد للحالات 1، 2، 3، ...، حيث تظهر أزواج المعدلات في مواضع خارج القطر هي

$$G=\begin{bmatrix}
a & \frac{F_2}{F_2+2F_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\frac{2F_1}{F_2+2F_1} & b & \frac{F_3}{F_3+2F_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & \frac{2F_2}{F_3+2F_2} & c & \frac{F_4}{F_4+2F_3} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & \frac{2F_3}{F_4+2F_3} & d & \frac{F_5}{F_5+2F_4} & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \frac{2F_4}{F_5+2F_4} & e & \frac{F_6}{F_6+2F_5} & 0 & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots
\end{bmatrix}.$$

شكل (3) يوضح المصفوفة المولدة المعدلة لعملية ماركوف المستمرة في الوقت

حيث أن a، b، c، d، e: هي قيم سالبة مختارة تحقق شروط المصفوفة المعدل لعملية ماركوف المستمرة في الوقت (CTMP) بحيث يكون مجموع كل صف يساوي 0.

نحدد أن $\vec{\pi}$ تشير الي متجه الصف الحدي (احتمالات فيبوناتشي)، $\vec{0}$ هو متجه الصف للصفر، ثم تعطي نتائج عمليات ماركوف $\vec{0} = \vec{\pi} G$.

http://www.doi.org/10.62341/ANae1608

نريد تحويل مصفوفتنا إلى سلسلة ماركوف في الزمن المنفصل. لذا، نريد تعديل قيمة G. بما أن بعض القيمة السالبة قد تكون أكبر من 0.5، واثنتان منها في نفس الصف، فإن مجموع الصف سيكون أكبر من 1. لذا، لنفترض أن G حيث G^* لا تزال تحتوي على مصفوفة معدل بنفس متجه الاحتمالية الحدية.

وبالتالي $\vec{0} = \vec{\pi}\, G^*$ ، وبإضافة $\vec{\pi}$ للطرفين نحصل علي

$$\vec{\pi} = \vec{\pi} + \vec{\pi} G^* = \vec{\pi}(I + G^*) .$$

ونُعرف $P = I + G^*$ حيث P تحقق $P = \vec{\pi}\, P$، والمدخلات غير سالبة، ومجموع الصف يساوي 1.

إذا P هي مصفوفة انتقال احتمالية في زمن منفصل. بعد أن حوّلنا إعدادنا إلى سلسلة ماركوف في زمن منفصل، يمكننا تحديد مصفوفة انتقال ماركوف الدقيقة التي سنستخدمها.

$$P = \begin{bmatrix}
1+0.5a & \frac{0.5F_2}{F_2+2F_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\frac{F_1}{F_2+2F_1} & 1+0.5b & \frac{0.5F_3}{F_3+2F_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & \frac{F_2}{F_3+2F_2} & 1+0.5c & \frac{0.5F_4}{F_4+2F_3} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & \frac{F_3}{F_4+2F_3} & 1+0.5d & \frac{0.5F_5}{F_5+2F_4} & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \frac{F_4}{F_5+2F_4} & 1+0.5e & \frac{0.5F_6}{F_6+2F_5} & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{F_5}{F_6+2F_5} & 1+0.5f & \frac{0.5F_7}{F_7+2F_6} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}$$

شكل (4) يوضح مصفوفة انتقال ماركوف الدقيقة

هي مصفوفة انتقال احتمالية الزمني المنفصل.

http://www.doi.org/10.62341/ANae1608

$$P \approx \begin{bmatrix} 0.8332 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0.3333 & 0.4167 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0.25 & 0.5358 & 0.2142 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0.2857 & 0.4871 & 0.2272 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0.2727 & 0.5051 & 0.2222 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2778 & 0.4981 & 0.2241 & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & . & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & . & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & . & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & . & \cdots \end{bmatrix}$$

شكل (5) يوضح مصفوفة الانتقال الاحتمالية المنفصل

الحالة هي 1، 2، 3، 4، ...هذه مصفوفة انتقال احتمالية، ولها متجه احتمالي حدّي هو احتمالات فيبوناتشي. يمكننا استخدامها لتوليد قيم عشوائية من توزيع فيبوناتشي. تم نطبق المعادلة $P = \vec{\pi} P$ ونقارن الاحتمال المقَدر من مصفوفة الانتقال P بالاحتمالات الحقيقية.

3- برنامج R لفيبوناتشي ونتائجه[9].

إذا كنا في الحالة x، في الخطوة i، فإننا ننتقل الي الحالة $x-1$ أو $x+1$ عند الخطوة $i+1$، والاحتمالات تكون علي الترتيب

$$\frac{F_{x-2}}{F_{x-1}+2F_{x-2}}, 1-\frac{F_{x-2}}{F_{x-1}+2F_{x-2}}-\frac{0.5F_x}{F_x+2F_{x-1}}, \frac{0.5F_x}{F_x+2F_{x-1}}, x = 3,4,5,..$$

ونعرف، $F_0 = 0$ وهذا يكون سهل عند التطبيق في حزمة R.

نستخدم حزمة R لتوليد 1000000 قيمة من التوزيع المنتظم في الفترة (0،1)، وببساطة يمكن الحصول علي $x[i+1]$ من $x[i]$ وذلك بطرح 1 إذا كانت قيمة التوزيع المنتظم (1،0) اصغر من $\frac{F_{x[i]-2}}{F_{x[i]-1}+2F_{x[i]-2}}$ ، واضافة 1 إذا كانت قيمة التوزيع المنتظم تقع

http://www.doi.org/10.62341/ANae1608

ضمن الفترة $\left(1 , 1-\frac{0.5F_{x[i]}}{F_{x[i]}+2F_{x[i]-1}}\right)$، ولا نعمل شيء خلاف ذلك. ولقد حصلنا على النتائج التالية:

1) طباعة اول 100 قيمة من بين (1000000)

[1] 2 2 2 2 2 3 3 2 2 2 2 3 4 4 4 4 4 5 6 6 6 6 6 6 7 7
[27] 7 8 8 8 9 9 9 10 10 9 9 9 9 9 9 10 10 11 11 11 10 10 10 10 10
[52] 10 10 10 10 10 10 11 10 11 11 11 10 11 11 11 10 10 11 11 12
[72] 13 13 14 14 14 13 13 14 14 13 13 13 14 13 13 12 12 12 11 11
[92] 11 12 12 11 12 12 12 13 13

2) الاحتمالات المقَّدرة من محاكاة MCMC والاحتمالات الحقيقية لـ { 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9} هي:

جدول1. يوضح الاحتمالات المقدرة من محاكاة سلسلة ماركوف مونت كارول والاحتمالات الحقيقية

x	2	3	4	5	6	7	8	9
Est.Prob.	0.2556	0.1275	0.1272	0.09427	0.07709	0.0608	0.04892	0.03936
TrueProb	0.2500	0.1250	0.1250	0.09375	0.07812	0.0625	0.05078	0.04101

والاحتمالات المقدرة من محاكاة الدالة العكسية والاحتمالات الحقيقية لـ {2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9} هي:

جدول 2. يوضح الاحتمالات المقدرة من والدالة العكسية والاحتمالات الحقيقية

x	2	3	4	5	6	7	8	9
Est.Prob.	0.2507	0.1253	0.1246	0.09400	0.07796	0.06189	0.05054	0.04102
TrueProb.	0.2500	0.1250	0.1250	0.09375	0.07812	0.0625	0.05078	0.04101

2) -أعلى 4 قيم ل x موضحة في الجدول التالي:
(3

جدول 3. يوضح أعلى 4 قيم من محاكاة سلسلة ماركوف مونت كارول والدالة العكسية

MCMC (x,count)	**(56,12)**	**(57,13)**	**(58,4)**	**(59,2)**
InvFunctionCount	**(57,2)**	**(58,4)**	**(60,2)**	**(62,2)**

كلتا الطريقتين المستخدمة في المحاكاة غير مرضيتين إلى حد ما. تفشل طريقة MCMC في التقاط أي قيمة أعلى من 60 عندما يُتوقع وجود قيمة ما. (إذا وجدت MCMC قيمًا كبيرة، فيجب أن تكون كل قيمة أصغر موجودة أيضًا). تحتوي طريقة الدالة العكسية، وهي طريقة دقيقة، على فجوات كبيرة في القيم العليا، مما يشير إلى أن النمط عند الذيل من غير المرجح أن يظهر مرة أخرى في بعض الاحيان، ولا يمكن استخدامه بشكل موثوق لتمثيل الذيل العلوي.

http://www.doi.org/10.62341/ANae1608

4 –النتائج والتعليقات ومقارنة الطريقتين

طريقة MCMC الخاصة بنا هي حالة خاصة من طريقة RosenbluthHasting MCMC. يجب أن نُعرف فقط نسبة الاحتمالات المهمة، لأن طريقة MCMC لتوليد القيم العشوائية تتطلب ذلك. ومع ذلك، فإن البرمجة المطلوبة لطريقتنا لا تتطلب سوى توليد أرقام عشوائية منتظمة. إنها عملية حسابية بسيطة.

طريقة الدالة العكسية هي التقنية القياسية لمحاكاة العديد من المتغيرات العشوائية. ومع ذلك، فهي تتطلب منا معرفة أو القدرة على حساب شكل دالة الكثافة أو دالة الكتلة. وهذا معروف ببرمجة توزيع فيبوناتشي، مما يجعل برمجتها أصعب من طريقة MCMC في معظم الحزم البرمجية باستثناء R.

1- بما أن حالة كل خطوة تعتمد على حالة الخطوة السابقة، فسنستخدم أمر "sample" في حزمة R كمجموعة فرعية عشوائية، مما يعني أنه بالنسبة لمجتمع كبير وحجم عينة صغير، نحصل على قيم مختارة تتصرف بشكل أساسي على أنها مستقلة. في أمر "sample" الخاص بنا، نعرض 20 قيمة مستقلة تقريبًا عن توزيع فيبوناتشي. العينة الناتجة [1 , 20] (x) تكون

6 7 3 2 9 9 10 2 7 6 3 3 10 7 6 5 3 9 8 13

تبدو هذه القيم في الواقع وكأنها قيم مستقلة عن توزيع فيبوناتشي.

2- على الرغم من أن نتائجنا تتعلق بتوزيع فيبوناتشي، إلا أن طريقة MCMC تعمل بشكل جيد إذا كان من السهل الحصول على نسبة الاحتمالات من التوزيعات المنفصلة.

3- قد يتساءل البعض عن سبب محاكاة التوزيع مع أننا نعرف دالة كتلة الاحتمال، حيث يُمكننا بسهولة الحصول على العزوم والمقاييس الأخرى. سنجيب على هذا السؤال بأنه إذا أردنا اختبار استراتيجية جديدة، فعلينا الحصول على قيم فعلية من التوزيع، وليس فقط الاحتمالات، حتى نتمكن من إجراء محاكاة لمعرفة تأثير الاستراتيجية.

4- تبدو نتائج MCMC أكثر منطقية، لأن الاحتمالات المقدَرة بناءً عليها لن يكون لها احتمال تقديري يساوي الصفر، إذ لا توجد تقديرات مجاورة تساوي الصفر على كلا الجانبين. وهذه ميزة لـ MCMC مقارنةً بطرق المحاكاة الأخرى.

الخلاصة:

1- من طريقة MCMC الخاصة بنا تم الحصول على مصفوفة انتقال احتمالية، ولها متجه احتمالي حدّي هو احتمالات فيبوناتشي.

http://www.doi.org/10.62341/ANae1608

2- تم توليد قيم عشوائية من توزيع فيبوناتشي تتصرف بشكل أساسي على أنها مستقلة من مصفوفة انتقال الاحتمال الخاصة بنا. في أمر "sample". العينة الناتجة (x) [1 , 20] تكون

6 7 3 2 9 9 10 2 7 6 3 3 10 7 6 5 3 9 8 13

3- البرمجة المطلوبة لطريقتنا تتطلب توليد أرقام عشوائية منتظمة فقط. إنها عملية حسابية بسيطة.

4- الاحتمالات المقدرة من طريقتنا كانت قريبا جدا من الاحتمالات الحقيقية.

5- طريقة MCMC غير مرضية إلى حدا ما، وتفشل في التقاط أي قيمة أعلى من 60 عندما يُتوقع وجود قيمة ما.

6- إذا وجدت طريقة MCMC قيمًا كبيرة، فيجب أن تكون كل قيمة أصغر موجودة أيضًا

التوصيات:

بعد إنشاء مصفوف انتقال ماركوف وتطبيقها على التوزيع الاحتمالي لفيبوناتشي باستخدام سلسلة ماركوف مونت كارلو(MCMC) ، يوصي الباحث بالتالي

1- أنشاء مصفوفة انتقال ماركوف جديدة وتطبيقها على التوزيع الاحتمالي للوكاس.

2- أسباب الفجوات في القيم العليا لطريقة MCMCوطريقة الدالة العكسية.

3- دراسة الأخطاء المحتملة في الطريقتين وطرق معالجتها

المراجع

[1] Xiang, F., & Neal, P. (2014). Efficient MCMC for temporal epidemics via parameter reduction. *Computational Statistics & Data Analysis*, *80*, 240-250.

[2] Beck, J. L., & Zuev, K. M. (2013). Asymptotically independent Markov sampling: a new Markov chain Monte Carlo scheme for Bayesian inference. *International Journal for Uncertainty Quantification*, *3*(5).

[3] Albert,J. and Rizzo, M. (2012). R by Example Chapter 13 Springier.

[4] Bilgici, G. (2021). On waiting time distribution of runs in a Fibonacci and Lucas sequences. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, (25), 774-781

http://www.doi.org/10.62341/ANae1608

[5] Hlynka, M. (2017). MCMC and the Fibonacci distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, *46*(5), 3375-3382.
[6] Medhi, J. (2010) Stochastic Processes. New Age Science.
[7] Herbei, R., & Berliner, L. M. (2014). Estimating ocean circulation: an MCMC approach with approximated likelihoods via the Bernoulli factory. *Journal of the American Statistical Association*, *109*(507), 944-954.
[8] Papamarkou, T., Mira, A., & Girolami, M. (2014). Zero variance differential geometric Markov chain Monte Carlo algorithms. *Bayesian Analysis*, *9*(1), 97-128.
[9] Sadegh, M., & Vrugt, J. A. (2014). Approximate bayesian computation using markov chain monte carlo simulation: Dream (abc). *Water Resources Research*, *50*(8), 6767-6787